第 11 講　数学Ⅲの積分

37　L を正定数とする．座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ に対し，原点 O を中心とし点 P を通る円周上を，P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $\mathrm{Q}(u(t),\ v(t))$ と表す．

(1)　$u(t)$，$v(t)$ を求めよ．

(2)　$0<a<1$ の範囲の実数 a に対し，積分

$$f(a)=\int_a^1\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt$$

を求めよ．

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ．

《11 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

38 u を実数とする．座標平面上の 2 つの放物線 C_1：$y=-x^2+1$，
C_2：$y=(x-u)^2+u$ を考える．
C_1とC_2が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a，b により，$a \leqq u \leqq b$と表される．

(1) a，b の値を求めよ．

(2) u が $a \leqq u \leqq b$ をみたすとき，C_1とC_2の共有点を $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ とする．ただし，共有点が 1 点のみのときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする．$2|x_1y_2-x_2y_1|$ を u の式で表せ．

(3) (2)で得られる u の式を $f(u)$ とする．定積分 $I=\int_a^b f(u)du$ を求めよ．

《14 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

39

(1)　すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ.

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$$

(2)　$m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ.

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

《10 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

40　n を正の整数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $g(x)$ を次のように定める．

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x|\leqq 1 \text{ のとき})\\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする．$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ．

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)\,dx\leqq q$$

(2)　関数 $h(x)$ を次のように定める．

$$h(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x|\leqq 1 \text{ のとき})\\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

《15 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　数学Ⅲの積分

37 L を正定数とする．座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ に対し，原点 O を中心とし点 P を通る円周上を，P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $\mathrm{Q}(u(t),\ v(t))$ と表す．

(1) $u(t)$，$v(t)$ を求めよ．

(2) $0<a<1$ の範囲の実数 a に対し，積分

$$f(a)=\int_a^1\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt$$

を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ．

《11 東大・理科》

【答】 (1) $u(t)=t\cos\dfrac{L}{t}$，$v(t)=t\sin\dfrac{L}{t}$

(2) $f(a)=\sqrt{L^2+1}-\sqrt{L^2+a^2}+L\log\dfrac{\sqrt{L^2+a^2}+L}{a(\sqrt{L^2+1}+L)}$　(3) $-L$

【解説】 (1) $\angle\mathrm{QOP}=\dfrac{L}{t}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\left(\cos\dfrac{L}{t},\ \sin\dfrac{L}{t}\right)$.

よって $\boldsymbol{u(t)=t\cos\dfrac{L}{t}}$，$\boldsymbol{v(t)=t\sin\dfrac{L}{t}}$.

(2) $u'(t)=\cos\dfrac{L}{t}+t\times\left(\dfrac{L}{t^2}\sin\dfrac{L}{t}\right)$，$v'(t)=\sin\dfrac{L}{t}-t\times\left(\dfrac{L}{t^2}\cos\dfrac{L}{t}\right)$ より

$\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}=\sqrt{1+\dfrac{L^2}{t^2}}$

ここで $\tan\theta=\dfrac{L}{t}\iff t=\dfrac{L}{\tan\theta}$ と置換積分するため，実数 α と β をそれぞれ $\tan\alpha=\dfrac{L}{a}$，$\tan\beta=L$ を満たす 0 より大きく $\dfrac{\pi}{2}$ 未満の実数とすると，

$$\begin{aligned}
f(a)&=\int_\alpha^\beta\frac{1}{|\cos\theta|}\cdot\frac{L}{-\sin^2\theta}d\theta\\
&=\int_\beta^\alpha\frac{L}{\sin^2\theta\cos\theta}d\theta\\
&=L\int_\beta^\alpha\left\{\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1+\sin\theta}\right)\right\}\cos\theta\cdot d\theta\\
&=L\left[-\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right]_\beta^\alpha\\
&=L\left[-\frac{1}{\sin\theta}+\log\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right]_\beta^\alpha\\
&=L\left\{\left(-\frac{1}{\sin\alpha}+\log\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)-\left(-\frac{1}{\sin\beta}+\log\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}\right)\right\}
\end{aligned}$$

ここで $\tan\alpha=\dfrac{L}{a}$，$\tan\beta=L$ より $\sin\alpha=\dfrac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{L^2+a^2}}$，

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\sin\beta=\dfrac{L}{\sqrt{L^2+1}}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{L^2+1}}$ なので

$$\boldsymbol{f(a)}=L\left\{-\frac{\sqrt{L^2+a^2}}{L}+\log\frac{\sqrt{L^2+a^2}+L}{a}+\frac{\sqrt{L^2+1}}{L}-\log\left(\sqrt{L^2+1}+L\right)\right\}$$

$$\boldsymbol{=\sqrt{L^2+1}-\sqrt{L^2+a^2}+L\log\frac{\sqrt{L^2+a^2}+L}{a\left(\sqrt{L^2+1}+L\right)}}$$

(3)　(2)の結果より $\dfrac{f(a)}{\log a}=\dfrac{\sqrt{L^2+1}-\sqrt{L^2+a^2}+L\log\dfrac{\sqrt{L^2+a^2}+L}{\sqrt{L^2+1}+L}}{\log a}-L$ であり，

$a\to+0$ のとき

$$\sqrt{L^2+1}-\sqrt{L^2+a^2}+L\log\frac{\sqrt{L^2+a^2}+L}{\sqrt{L^2+1}+L}\to\sqrt{L^2+1}-L+L\log\frac{2L}{\sqrt{L^2+1}+L},$$

$\log a\to-\infty$ なので $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}=\boldsymbol{-L}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

38 u を実数とする．座標平面上の 2 つの放物線 C_1：$y=-x^2+1$，C_2：$y=(x-u)^2+u$ を考える．
C_1とC_2が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a，b により，$a\leqq u\leqq b$と表される．

(1) a，b の値を求めよ．

(2) u が $a\leqq u\leqq b$ をみたすとき，C_1とC_2 の共有点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする．ただし，共有点が 1 点のみのときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする．$2|x_1y_2-x_2y_1|$ を u の式で表せ．

(3) (2)で得られる u の式を $f(u)$ とする．定積分 $I=\displaystyle\int_a^b f(u)du$ を求めよ．

《14 東大・理科》

【答】 (1) $a=-1-\sqrt{3}$，$b=-1+\sqrt{3}$　(2) $(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}$　(3) $\dfrac{21}{8}\pi$

【解説】 (1) $(x-u)^2+u=-x^2+1 \iff 2x^2-2ux+u^2+u-1=0$ が実数解をもつので
$(-u)^2-2(u^2+u-1)\geqq 0 \iff -u^2-2u+2\geqq 0$　$\therefore$ $-1-\sqrt{3}\leqq u\leqq -1+\sqrt{3}$
よって $\boldsymbol{a=-1-\sqrt{3}}$，$\boldsymbol{b=-1+\sqrt{3}}$．

(2) P_1 と P_2 は直線 $y=-ux+\dfrac{u^2+u+1}{2}$ 上より $y_j=-ux_j+\dfrac{u^2+u+1}{2}$ $(j=1,\ 2)$ と表せるので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{2|x_1y_2-x_2y_1|}&=2\left|x_1\left(-ux_2+\frac{u^2+u+1}{2}\right)-x_2\left(-ux_1+\frac{u^2+u+1}{2}\right)\right|\\&=|(u^2+u+1)(x_1-x_2)|\\&=(u^2+u+1)\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\\&=\boldsymbol{(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}}\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_a^b(u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}\,du=\left[-\frac{1}{3}(-u^2-2u+2)^{\frac{3}{2}}\right]_a^b=0$ より

$$\begin{aligned}I&=\int_a^b u^2\sqrt{-u^2-2u+2}\,du\\&=\int_a^b\{(u+1)-1\}^2\sqrt{3-(u+1)^2}\,du\end{aligned}$$

となるが，$u+1=\sqrt{3}\sin\theta$ と置換積分すると

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{3}\sin\theta-1)^2\sqrt{3}\,|\cos\theta|\cdot\sqrt{3}\cos\theta d\theta\\&=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^2\theta)d\theta\\&=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(7-3\cos4\theta+4\cos2\theta)d\theta\\&=\frac{3}{4}\left[7\theta-\frac{3}{4}\sin4\theta+2\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{21}{8}\pi}\end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

39

(1) すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ.

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$$

(2) $m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ.

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

《10 東大・理科》

【答】 (1) 略　　(2) 略

【解説】 (1) $f(x)=\dfrac{1-x}{k+x}$ とおくと，$f(x)=-1+\dfrac{k+1}{k+x}$ より $f'(x)=-\dfrac{k+1}{(k+x)^2}$,

$f''(x)=\dfrac{2(k+1)}{(k+x)^3}$ となる.

$0<x<1$ のとき $f''(x)>0$ つまり $y=f(x)$ はこの区間で下に凸であり，$f(0)=\dfrac{1}{k}$,

$f(1)=0$ なので，$0<x<1$ のとき $f(x)<-\dfrac{1}{k}(x-1)$ を満たす.

また，$f'(1)=-\dfrac{k+1}{(k+1)^2}=-\dfrac{1}{k+1}$ より $x=1$ における $y=f(x)$ の接線は

$y=-\dfrac{1}{k+1}(x-1)$. これと $0<x<1$ のとき$y=f(x)$ は下に凸なので，$0<x<1$ のとき

$f(x)>-\dfrac{1}{k+1}(x-1)$ を満たす.

以上より，$0<x<1$ において $-\dfrac{1}{k+1}(x-1)<f(x)<-\dfrac{1}{k}(x-1)$ となるので

$$\int_0^1\left\{-\frac{1}{k+1}(x-1)\right\}dx<\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1\left\{-\frac{1}{k}(x-1)\right\}dx$$

を得る.

$\displaystyle\int_0^1\left\{-\frac{1}{k+1}(x-1)\right\}dx=\left[-\frac{1}{2(k+1)}(x-1)^2\right]_0^1=\frac{1}{2(k+1)}$，同様に

$\displaystyle\int_0^1\left\{-\frac{1}{k}(x-1)\right\}dx=\frac{1}{2k}$ より $\displaystyle\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$ が示された.

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx=\int_0^1\left(-1+\frac{k+1}{k+x}\right)dx=\Big[-x+(k+1)\log|k+x|\Big]_0^1$

$=(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1$ なので，(1)は

$$\frac{1}{2(k+1)}<(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1<\frac{1}{2k}$$

$\displaystyle\iff\quad\frac{1}{2(k+1)^2}<\log(k+1)-\log k-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2k(k+1)}$ となる. よって

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)^2}<\sum_{k=n}^{m-1}\left\{\log(k+1)-\log k-\frac{1}{k+1}\right\}<\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

が成り立つ.

ここで，$x>0$ で単調減少な関数 $g(x)=\dfrac{1}{2x^2}$ において $k+1<x$ のとき $g(k+1)>g(x)$

つまり $\dfrac{1}{2(k+1)^2}>\dfrac{1}{2x^2}$ だから $\dfrac{1}{2(k+1)^2}>\displaystyle\int_{k+1}^{k+2}\dfrac{1}{2x^2}dx$

よって

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)^2}>\sum_{k=n}^{m-1}\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{2x^2}dx=\int_{n+1}^{m+1}\frac{1}{2x^2}dx=\left[-\frac{1}{2x}\right]_{n+1}^{m+1}=\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}$$

であり,

$$\sum_{k=n}^{m-1}\left\{\log(k+1)-\log k-\frac{1}{k+1}\right\}=\log m-\log n-\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k+1}=\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k},$$

$\displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=\frac{m-n}{2mn}$ となるので，与えられた不等式は示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

40 n を正の整数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める．

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x|\leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする．$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ．

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx\leqq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める．

$$h(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x|\leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$$

《15 東大・理科》

【答】 (1) 略　(2) $-\dfrac{e}{e+1}$

【解説】 (1) $I=n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx$ とおく．$nx=t$ と置換積分することで，

$I=\displaystyle\int_{-n}^{n}g(t)f\left(\frac{t}{n}\right)dt$ となるが，$|t|>1$ では $g(t)=0$ なので $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}g(t)f\left(\frac{t}{n}\right)dt$．ここで，

$-1\leqq t\leqq 1$ のとき $-\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{t}{n}\leqq\dfrac{1}{n}$ であり $p\leqq f\left(\dfrac{t}{n}\right)\leqq q$ となるので

$p\displaystyle\int_{-1}^{1}g(t)dt\leqq I\leqq q\int_{-1}^{1}g(t)dt$ となる．

ここで $\displaystyle\int_{-1}^{1}g(t)dt=\int_{-1}^{1}\frac{\cos(\pi t)+1}{2}dt=\left[\frac{\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)+t}{2}\right]_{-1}^{1}=1$ となるので $p\leqq I\leqq q$ が示された．

(2) $\log(1+e^{x+1})=f(x)$ とおくと，$g'(x)=h(x)$，$g(\pm n)=0$ より

$$n^2\int_{-1}^{1}h(nx)f(x)dx=n^2\left\{\left[\frac{g(nx)}{n}f(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{g(nx)}{n}f'(x)dx\right\}$$
$$=-n\int_{-1}^{1}g(nx)f'(x)dx$$

ここで $f'(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=1-\dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ において $1+e^{x+1}$ は増加関数より $\dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ は減少関数つまり $f'(x)$ は増加関数となるので，$-\dfrac{1}{n}\leqq x\leqq\dfrac{1}{n}$ のとき

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$f'\left(-\dfrac{1}{n}\right) \leqq f'(x) \leqq f'\left(\dfrac{1}{n}\right)$ となる.

よって(1)の結果より $f'\left(-\dfrac{1}{n}\right) \leqq n\displaystyle\int_{-1}^{1} g(nx)f'(x)dx \leqq f'\left(\dfrac{1}{n}\right)$ が成り立つ.

$n\to\infty$ のとき $f'\left(-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}} \to \dfrac{e}{1+e}$, $f'\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}} \to \dfrac{e}{1+e}$ なので

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_{-1}^{1} g(nx)f'(x)dx=\dfrac{e}{1+e}$ つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})dx=-\boldsymbol{\dfrac{e}{e+1}}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。